

15/4/19

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΦΡΑΓΜΕΝΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Έστω $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ και $I_1, I_2, \dots, I_k$ είναι k ανοικτά διαστήματα τέτοια ώστε $I = \overline{I_1} \cup \overline{I_2} \cup \dots \cup \overline{I_k}$.
 Η πεπερασμένη αυτή συλλογή διαστημάτων $\{I_i : i \in \{1, \dots, k\}\}$ τη λέμε αλκή διαμέριση του διαστήματος I .

- Με $\mathcal{A}(I)$ το σύνολο των αλκών διαμερίσεων του διαστήματος I
- Θεωρούμε μια διαμέριση Δ του $[a, b]$ με $\Delta = \{(x_{i-1}, x_i) : i \in \{1, \dots, n\}\}$ με $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
 ορίζουμε για $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και για Δ όπως παραπάνω:

$$V(f, \Delta) := \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \quad (\text{μεταβολή ως προς διαμέριση } \Delta.)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι φραγμένης μεταβολής στο $[a, b]$ αν η ποσότητα:

$V_a^b(f) = \sup \{ V(f, \Delta) : \Delta \in \mathcal{X}(a, b) \}$ είναι πεπερασμένος πραγματικός αριθμός

Το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι φραγμένης μεταβολής στο $[a, b]$ συμβολ. $BV([a, b])$.

Παρατήρηση

Αν $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι μονότονη στο $[a, b]$ τότε η f είναι φραγμένης μεταβολής.

Πράγματι

Έστω $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ και $\Delta = \{(x_{i-1}, x_i) : i \in \{1, \dots, n\}\}$ και έστω ότι η f είναι αύξουσα τότε

$$V(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots \\ \dots + f(x_n) - f(x_{n-1}) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$$

οπότε εφόσον τα παραπάνω ισχύουν για την τυχούσα αληθή διαμέριση Δ , έχουμε

$$V_a^b(f) = \sup \{ V(f, \Delta) : \Delta \in \mathcal{X}(a, b) \} = f(b) - f(a)$$

$\downarrow$ γιατί η ισοτιμία

Σηλ. $V_a^b(f)$ είναι πεπερασμένος πραγματικός αριθμός

Παρατήρηση

Εάν f, g είναι δύο μονότονες συναρτήσεις στο $[a, b]$ και $h = f - g$ τότε η h είναι φραγμένης μεταβολής στο $[a, b]$

Προσμάει Εαν $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\Delta = \{(x_{i-1}, x_i) : i \in \{1, \dots, n\}\}$

$$\text{τότε } |h(x_i) - h(x_{i-1})| = |f(x_i) - g(x_i) - f(x_{i-1}) - g(x_{i-1})| \leq \\ \leq |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |g(x_i) - g(x_{i-1})|$$

$$\text{αρα } V(h, \Delta) = \sum_{i=1}^n |h(x_i) - h(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \\ + \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| \text{ και εφόσον } f, g \text{ μονοτονες}$$

ονότε

$$V(f, \Delta) = |f(b) - f(a)| \text{ και } V(g, \Delta) = |g(b) - g(a)|$$

και

$$V(h, \Delta) \leq |f(b) - f(a)| + |g(b) - g(a)| \text{ αρα}$$

η ολική μεταβ. της f στο διάστημα $[a, b]$:

$$V_a^b(f) = \sup \{ V(h, \Delta) : \Delta \in \mathcal{X}([a, b]) \} \leq |f(b) - f(a)| + |g(b) - g(a)|$$

Παρατήρηση: (1) Εαν $f, g \in B.V.([a, b])$ τότε και $f+g \in B.V.([a, b])$

(2) Η συνέχεια μιας συνάρτησης $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ δεν εξασφαλίζει το ότι η f είναι φραγμένης μεταβολής.

π.χ Έστω $f: [0, \frac{2}{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ x \cdot \sin \frac{1}{x} & x \in (0, \frac{2}{\pi}] \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{2}{\pi}]$, αλλά όχι φ.μ.

Για $n \in \mathbb{N}$ ορίσουμε την εξής διαμερίση του $[0, \frac{2}{\pi}]$

$$\Delta_n = \{(x_{i-1}, x_i) : x_0 = 0, x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (n-(k-1))\pi}, k \in \{1, 2, \dots, n+1\}\}$$

σημ. $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}, \dots, x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi}, x_{n+1} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

$$\sin \frac{1}{x_k} = \sin \frac{1}{\frac{\pi}{2} + [n-(k-1)]\pi} = \sin(\frac{\pi}{2} + [n-(k-1)]\pi) = (-1)^{k-1}$$

ονότε $V(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n+1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \dots \\ + |f(x_{n+1}) - f(x_n)| = x_1 - 0 + |(-1)x_2 - x_1| + \dots + |(-1)^n x_{n+1} - (-1)^{n-1} x_n| \\ = x_1 + x_2 + x_1 + \dots + x_{n+1} + x_n$

$$= 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + x_{n+1} = \frac{2}{n} (1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n) + \frac{2}{n}$$

$$= \frac{2}{n} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + n} + \frac{1}{\frac{1}{2} + (n-1)} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} + 1 \right) >$$

$$> \frac{2}{n} \left(\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1+(n-1)} + \dots + \frac{1}{1+1} + 1 \right) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Εάν $\sigma_k = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$, σ_k είναι αυξουσα ακολουθία

και $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \sup \{ \sigma_k : k \in \mathbb{N} \} = +\infty$ οπότε

$$\sup \{ V(f, \Delta_n) : n \in \mathbb{N} \} \geq \frac{2}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \text{ συνεπώς}$$

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{X}([0, \frac{2}{n}])} V(f, \Delta) \geq \sup \{ V(f, \Delta_n) : n \in \mathbb{N} \} = +\infty$$

Παρατήρηση

Η συνάρτηση $f: [0, \frac{2}{n}] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x=0 \\ x \sin \frac{1}{x}, x \in (0, \frac{2}{n}] \end{cases}$ είναι φραγμένη στο $[0, \frac{2}{n}]$ (ως συνεχής σε συμπαγές) αλλά δεν είναι φραγμένης μεταβολής. Οπότε κάθε φραγμένη συνάρτηση δεν είναι απαραίτητα συνάρτηση φραγμ. μεταβολής.

Άσκηση

Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και τέτοια ώστε η f' να υπάρχει στο (a, b) και να είναι φραγμένη. Να δείξετε ότι η f είναι φραγμένης μεταβολής.

Απ. Έστω $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f'(x)| \leq M \quad \forall x \in (a, b)$

Έστω επίσης διαμέριση Δ του $[a, b]$ τέτοια ώστε $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ έχουμε ότι για κάθε διαστήμα $[x_i, x_{i+1}]$ από $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ οπότε: $\exists \xi \in (x_i, x_{i+1})$ τέτοιο ώστε $|f(x_{i+1}) - f(x_i)| = |f'(\xi)| |x_{i+1} - x_i| \leq M |x_{i+1} - x_i|$ οπότε $V(f, \Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq M(x_1 - x_0) + M(x_2 - x_1) + \dots + M(x_n - x_{n-1}) = M(x_n - x_0) = M(b-a)$

Αρα

$$V_a^b(f) = \sup \{ V(f, \Delta) : \Delta \in \mathcal{X}([a, b]) \} \leq M(b-a) \quad \text{δηλ. } f \in BV([a, b])$$

Σημείωση

Η συνάρτηση $f(x) = x^{1/3}$, $x \in [0, 1]$ είναι μονότονη άρα είναι συνάρτηση φραγμένης μεταβολής αλλά $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = +\infty$.

~~Παρατήρηση~~

• Γνωρίζουμε ότι το σύνολο των φραγμένων συναρτήσεων σε $[a, b]$ συμβ. $B([a, b])$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του συνόλου των συναρτήσεων $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (συμβ. $F([a, b], \mathbb{R})$)

ΠΡΟΤΑΣΗ

Το σύνολο των συναρτήσεων φραγμένης μεταβολής σε $[a, b]$, $BV([a, b])$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $B([a, b], \mathbb{R})$

Απόδ.

Έστω $f \in BV([a, b])$ έστω επίσης $x \in (a, b)$ θεωρούμε το σύνολο $P = \{a, x, b\}$ και τη διαμερίση $\Delta = \{(a, x), (x, b)\}$ του $[a, b]$ τότε $x_0 = a < \overset{1}{x_1} = x < b = x_2$ και

$$\begin{aligned} V(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^2 |f(x_i) - f(x_{i-1})| = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| = \\ &= |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \end{aligned}$$

οπότε εφόσον η f είναι φραγμ. μεταβολής: $V_a^b(f) < \infty$

$$\begin{aligned} \text{αρα } V(f, \Delta) &= |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \sup \{ V(f, \Delta') : \Delta' \in \mathcal{X}([a, b]) \} \\ &= V_a^b(f) \end{aligned}$$

αρα $|f(x) - f(a)| \leq V_a^b(f) \quad \forall x \in (a, b)$ άρα $|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq V_a^b(f) + |f(a)|$. Άρα εφόσον τα παραπάνω ισχύουν για οποιονδήποτε x έπεται ότι $f \in B([a, b])$ δηλ.

$$BV([a, b]) \subseteq B([a, b])$$

Συμφωνά με παραδείγματα που δόθηκαν στα προηγούμενα υπάρχει $f \in B([a, b])$ τέτοια ώστε $f \notin BV([a, b])$ άρα $BV([a, b])$ γνήσιο υποσύνολο του $B([a, b])$

• Για να δείξουμε ότι $BV([a, b])$ είναι διανυσματικός υπόχωρος θεωρούμε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $f, g \in BV([a, b])$.

Έστω επίσης διαμερίση Δ του $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

και έστω $h = \lambda f + \mu g$ τότε

$$V(h, \Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} |h(x_{i+1}) - h(x_i)| \leq \dots \leq |\lambda| \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| +$$

$$+ |\mu| \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq |\lambda| V_a^b(f) + |\mu| V_a^b(g) < +\infty$$

οπότε $V_a^b(h) = \sup \{ V(h, \Delta) : \Delta \in \mathcal{P}([a, b]) \} \leq |\lambda| V_a^b(f) + |\mu| V_a^b(g)$

δηλ. $h = \lambda f + \mu g \in BV([a, b])$

Άσκηση

Να δείξετε ότι αν $f, g \in BV([a, b])$ τότε και $f \cdot g \in BV([a, b])$

Αν.

Έστω Δ διαμερίση του $[a, b]$ $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ τότε

$$V(f \cdot g, \Delta) = \sum_{i=1}^n |f \cdot g(x_i) - f \cdot g(x_{i-1})| \stackrel{(*)}{=} \text{Εφ'όσον}$$

$f, g \in BV([a, b]) \in B([a, b], \mathbb{R}) \Rightarrow f, g$ φραγμένες στο $[a, b]$

άρα $\exists M_1, M_2 \geq 0$ τ.ω. $|f(x)| \leq M_1, \forall x \in [a, b]$, $|g(x)| \leq M_2$ ~~όπου~~
 $\forall x \in [a, b]$. Εννείουν $V_a^b(f) < \infty$ και $V_a^b(g) < \infty$. Λόγω αυτών
 από την (*) έχουμε:

$$V(f \cdot g, \Delta) = \sum_{i=1}^n |f(x_i)g(x_i) - f(x_i)g(x_{i-1}) + f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |f(x_i)| |g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |g(x_{i-1})| |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$\leq M_1 \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| + M_2 \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M_1 V(g, \Delta) + M_2 V(f, \Delta) \quad (40)$$

$$\leq M_1 V_\alpha^b(g) + M_2 V_\alpha^b(f)$$

αρα

$$V_\alpha^b(fg) = \sup \{ V(fg, \Delta) : \Delta \in \mathcal{X}([a, b]) \} \leq M_1 V_\alpha^b(g) + M_2 V_\alpha^b(f) < \infty$$

Άσκηση

Να δείξετε ότι εάν $f, g \in BV([a, b])$ τότε $f \vee g \in BV([a, b])$ και $f \wedge g \in BV([a, b])$, όπου $(f \vee g)(x) = \max\{f, g\}$, $(f \wedge g)(x) = \min\{f, g\}$.

Προταση

Για $f \in BV([a, b])$ και $\gamma \in (a, b)$ ισχύει $f \in BV([a, \gamma])$ και $f \in BV([\gamma, b])$.

Αποδ.

Έστω $\gamma \in (a, b)$. Θεωρούμε επίσης $\Delta_1 = \{(x_{i-1}, x_i) : i \in \{1, \dots, n\}\}$ του διαστήματος $[a, \gamma]$ και $\Delta_2 = \{(x_{i-1}, x_i) : i \in \{n+1, \dots, k\}\}$ του $[\gamma, b]$ τότε η $\Delta_1 \cup \Delta_2$ είναι μια διαμέριση του $[a, b]$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=n+1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= \\ &= \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq V_\alpha^b(f) \end{aligned}$$

αυτά ισχύουν και για τις διαμερίσεις Δ_1 και Δ_2 οπότε

$$\begin{aligned} V(f, \Delta_1) + V(f, \Delta_2) &\leq V_\alpha^b(f) \quad \text{αρα } \sup \{ V(f, \Delta_1) : \Delta_1 \in \mathcal{X}([a, \gamma]) \} + \\ &+ V(f, \Delta_2) \leq V_\alpha^b(f) \quad \text{δηλ. } V_\alpha^\gamma(f) + V(f, \Delta_2) \leq V_\alpha^b(f) \end{aligned}$$

$$\text{αρα } V_\alpha^\gamma(f) + \sup \{ V(f, \Delta_2) : \Delta_2 \in \mathcal{X}([\gamma, b]) \} \leq V_\alpha^b(f)$$

$$V_\alpha^\gamma(f) + V_\gamma^b(f) \leq V_\alpha^b(f) < \infty.$$

$$\cdot V_\alpha^\gamma(f) < \infty$$

$$\cdot V_\gamma^b(f) < \infty \Rightarrow f \in BV([a, \gamma]) \text{ και } f \in BV([\gamma, b])$$

Έστω Δ διαμέριση του $[a, b]$, $\Delta = \{(x_{i-1}, x_i) : i=1, 2, \dots, k\}$
 και εφόσον $\gamma \in (a, b)$ θα υπάρξει $n \in \{1, \dots, k\}$
 τέτοιος ώστε $\gamma \in (x_{n-1}, x_n]$

Θετούμε $\Delta_1 = \{(x_{i-1}, x_i) : i=1, 2, \dots, n\} \cup (x_{n-1}, \gamma)$

$\Delta_2 = \{(x_{i-1}, x_i) : i=n+1, \dots, k\} \cup (\gamma, x_n)$

Οι Δ_1 και Δ_2 είναι άνδρες διαμερίσεις των
 διαστημάτων $[a, \gamma]$ και $[\gamma, b]$ αντιστοίχα.

τότε για την αρχική διαμέριση Δ έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_n) - f(x_{n-1})| + \\ &+ \sum_{i=n+1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_n) - f(\gamma)| + |f(\gamma) - f(x_{n-1})| + \sum_{i=n+1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= V(f, \Delta_1) + V(f, \Delta_2) \leq V_a^\gamma(f) + V_\gamma^b(f) \end{aligned}$$

Άρα $V(f, \Delta) \leq V_a^\gamma(f) + V_\gamma^b(f)$

οπότε $V_a^b(f, \Delta) = \sup \{V(f, \Delta) : \Delta \in \mathcal{X}(a, b)\} \leq V_a^\gamma(f) + V_\gamma^b(f)$

ΘΕΩΡΗΜΑ

~~Θεωρή~~ Εάν f είναι ~~φραγμένη~~ συνάρτηση φραγμένης μεταβολής στο $[a, b]$
αν και μόνο αν υπάρχουν αύξουσες συνάρτησεις f_1 και
 f_2 ορισμένες στο $[a, b]$ τέτοιες ώστε $f = f_1 - f_2$